Contrôle n° 2 : Equations et inéquations irrationnelles

Série n° 1 - 4 octobre 2011

1. Expliquer la méthode de résolution d'une équation irrationnelle. Enoncer le principe d'équivalence utilisé.

   Voir théorie

2. Résoudre l'inéquation $\sqrt{x+3} > x+3$.

   Représenter dans un même repère orthonormé, les graphiques de deux fonctions de façon à donner une interprétation graphique de l'équation.

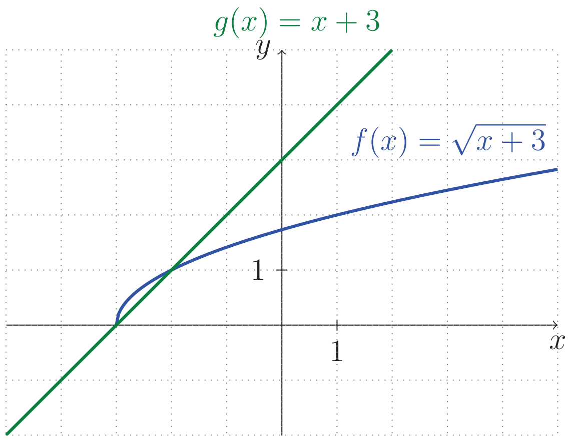
   CE : $x+3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -3$.

   Vu les CE, les deux membres sont positifs. L'inéquation est donc équivalente à

$$(x+3) > (x+3)^2 \Leftrightarrow (x+3)(1-(x+3)) > 0 \Leftrightarrow (x+3)(-x-2) > 0 \Leftrightarrow (x+3)(x+2) < 0.$$

x		-3		-2	
$(x+3)(x+2)$	$+$	0	$-$	0	$+$

   D'où $S =]-3, -2[$



3. Résoudre l'équation $\sqrt{x+3} + 2\sqrt{x} = 4$

   CE : $x+3 > 0$ et $x > 0 \Leftrightarrow x > 0$.

   Les deux membres de l'équation sont positifs. L'équation est donc équivalente à

$$x+3+4x+4\sqrt{x+3}\sqrt{x} = 16 \Leftrightarrow 4\sqrt{x+3}\sqrt{x} = 13-5x$$

   - Si $13-5x < 0$ càd si $x > \frac{13}{5}$, alors $M_1 > 0$ et $M_2 < 0$. L'équation est impossible.

- Si $13-5x \geq 0$ càd si $x \leq \dfrac{13}{5}$, alors les deux membres sont positifs.
  L'équation est équivalente à

  $16x(x+3)=(13-5x)^2 \Leftrightarrow 16x^2+48x=169-130x+25x^2 \Leftrightarrow 9x^2-178x+169=0$

  Comme $\Delta = 178^2-4\cdot 12\cdot 169=25600=160^2$, on a

$$x=\frac{178+160}{18} \text{ ou } x=\frac{178-160}{18} \Leftrightarrow \underbrace{x=\frac{169}{9}}_{\text{à rejeter}} \text{ ou } x=1$$

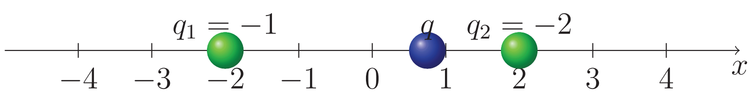
D'où $\mathrm{S}=\{1\}$

4. Résoudre l'équation $\sqrt{-x^2+x-1}=-3$
   CE : $-x^2+x-1 \geq 0$. Comme $\Delta=-3$, le trinôme a toujours le signe du coefficient de x^2, càd est toujours négatif.
   L'équation n'a pas de sens. $S=\emptyset$.

5. Deux particules de charges électriques respectives $q_1=-1$ et $q_2=-2$ sont placées le long d'un axe gradué aux abscisses $x=-2$ et $x=2$. Si on place une charge $q=+1$ au point d'abscisse x situé entre les deux charges $(-2<x<2)$, cette charge subit une force résultante

$$F=\frac{-k}{(x+2)^2}+\frac{2k}{(x-2)^2}$$

   où k est une constante positive.



   Pour quelles positions initiales de la particule q celle-ci subira-t-elle une force résultante orientée suivant les abscisses positives, càd pour quelles valeurs de x a-t-on $F>0$?
   On demande de résoudre $F>0$. Or

$\dfrac{-k}{(x+2)^2}+\dfrac{2k}{(x-2)^2}>0$

$\Leftrightarrow -\dfrac{1}{(x+2)^2}+\dfrac{2}{(x-2)^2}>0$ car $k>0$

$\Leftrightarrow \dfrac{-(x-2)^2+2(x+2)^2}{(x+2)^2\cdot(x-2)^2}>0$

$\Leftrightarrow \dfrac{-x^2+4x-4+2x^2+8x+8}{(x^2-4)^2}>0$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+12x+4}{(x^2-4)^2} > 0$$

Le numérateur s'annule ssi

$$x = \frac{-12+\sqrt{128}}{2} \text{ ou } x = \frac{-12-\sqrt{128}}{2} \Leftrightarrow x = -6+4\sqrt{2} \text{ ou } x = -6-4\sqrt{2}$$

Vu l'énoncé, $-2 < x < 2$, les colonnes en rouge du tableau de signe doivent être rejetées.

x		$-6-4\sqrt{2}$		-2		$-6+4\sqrt{2}$		2	
$(x^2+12x+4)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$(x^2-4)^2$	$+$	$+$	$+$	0	$+$	$+$	$+$	0	$+$
M_1	$+$	0	$-$	$\nexists$	$-$	0	$+$	$\nexists$	$+$

La colonne verte est donc la seule solution. $S =]-6+4\sqrt{2}, 2[$.