Contrôle n° 8 : Trigonométrie

Formules d'addition, duplication et Carnot

Série n° 1 - 27 mars 2012

1. (a) Ecrire la formule relative au cosinus d'une différence

   Voir théorie

   (b) En déduire la formule relative au cosinus d'une somme

   Voir théorie

   (c) En déduire la formule relative au cosinus du double d'un angle.

   Voir théorie

   (d) En déduire la formule de Carnot relative à $1 + \cos x$

   Voir théorie

2. Exprimer $\cos 3a$ en fonction de $\cos a$

$$\begin{aligned}\cos 3a &= \cos(2a + a)\\ &= \cos 2a \cdot \cos a - \sin 2a \cdot \sin a\\ &= (2\cos^2 a - 1)\cos a - 2\sin^2 a \cos a\\ &= 2\cos^3 a - \cos a - 2(1 - \cos^2 a)\cos a\\ &= 2\cos^3 a - \cos a - 2\cos a + 2\cos^3 a\\ &= 4\cos^3 a - 3\cos a\end{aligned}$$

3. Vérifier l'identité

$$\sin^2 x \cdot \cos^2 x = \frac{1}{8}(1 - \cos 4x)$$

$$\begin{aligned}M_2 &= \frac{1}{8}(2\sin^2 2x)\\ &= \frac{1}{4}(\sin^2 2x)\\ &= \frac{1}{4}(2\sin x \cos x)^2\\ &= \sin^2 x \cos^2 x\end{aligned}$$

4. Démontrer l'identité suivante

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}\right)=\frac{1-\sin a}{\cos a}$$

et spécifier les conditions d'existence.

CE : $\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ et $\cos a\neq 0$

$\Leftrightarrow \frac{a}{2}\neq-\frac{\pi}{4}+k\pi$ et $a\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$

$\Leftrightarrow a\neq-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ et $a\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$

$\Leftrightarrow a\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$

D'une part,

$$\begin{aligned}M_1&=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}\right)\\&=\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-\operatorname{tg}\frac{a}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\cdot\operatorname{tg}\frac{a}{2}}\\&=\frac{1-\operatorname{tg}\frac{a}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{a}{2}}\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}M_2&=\frac{1-\sin a}{\cos a}\\&=\frac{1-\frac{2\operatorname{tg}\frac{a}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{a}{2}}}{\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{a}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{a}{2}}}\\&=\frac{1+\operatorname{tg}^2\frac{a}{2}-2\operatorname{tg}\frac{a}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{a}{2}}\\&=\frac{\left(1-\operatorname{tg}\frac{a}{2}\right)^2}{1-\operatorname{tg}^2\frac{a}{2}}\\&=\frac{1-\operatorname{tg}\frac{a}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{a}{2}}\end{aligned}$$

D'où $M_1=M_2$.